2015 考研数学（三）真题（完整版）

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）设 $\{x_n\}$ 是数列.下列命题中不正确的是

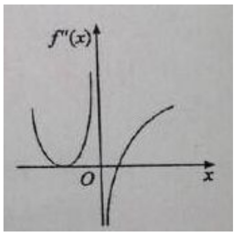
（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$.

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$.

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

（2）设函数 $f(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）内连续，其 2 价导函数 $f''(x)$的图形如右图所示，则曲线 $y=f(x)$的拐点个数为



（A）0.
（B）1.
（C）2.
（D）3.

（3）设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x,\ x^2+y^2\leqslant 2y\}$，函数 $f(x,y)$在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$.

（B）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$.

（C）$2\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)dy$.

（D）$2\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

（4）下列级数中发散的是

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n})$.

（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(5)设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$.若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充

分必要条件为

（A）$a\notin\Omega,d\notin\Omega.$　　（B）$a\notin\Omega,d\in\Omega.$

（C）$a\in\Omega,d\notin\Omega.$　　（D）$a\in\Omega,d\in\Omega.$

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交交换 $x=py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2.$，其中 $p=(e_1,e_2,e_3)$.若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 (x_1,x_2,x_3) 在正交交换下 $x=Qy$ 的标准形为

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2.$　　（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2.$

（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

（7）若 A,B 为任意两个随机事件，则

（A）$P(AB)\le P(A)P(B).$　　（B）$P(AB)\ge P(A)P(B).$

（C）$P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}.$　　（D）$P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}.$

（8）设总体 $X\sim B$（m,θ）,x_1，x_2…, x_n 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$$

（A）$(m-1)n\theta(1-\theta)$　　（B）$m(n-1)\theta(1-\theta)$

（C）$(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$　　（D）$mn\theta(1-\theta)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$=_______.

（10）设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$.若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)$=5,则 $f(1)$=______.

（11）若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $dz|_{(0,0)}$ =______.

（12）设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3,则 $y(x)$=______.

（13）设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2，-2，1，$B=A^2-A+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|B|$=______.

（14）设二维随机变量（X，Y）服从正态分布 N（1,0;1,1;0），则 $P\{XY-Y<0\}$=______.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

（16）（求本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\}$.

（17）（本题满分 10 分）

为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，p 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性（$\eta>0$）.

（Ⅰ）证明定价模型为 $p=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$;

（Ⅱ）若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$, 需求函数为 $Q=40-p$, 试由（Ⅰ）中的定价模型确定此商品的价格.

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0\in I$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

（19）（本题满分 10 分）

（Ⅰ）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$:

（Ⅱ）设函数 $u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x)$ 可导， $f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

（20）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $A^3=0$.

（Ⅰ）求 a 的值;

（Ⅱ）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵，求 X .

（21）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 a,b 的值;

（Ⅱ）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数.

（Ⅰ）求 Y 的概率分布;

（Ⅱ） 求 EY .

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x:\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

（Ⅰ）求 θ 的矩估计量;

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量.